

П.И. ПИЛОВ, д-р техн. наук

(Украина, Днепропетровск, Национальный горный университет),

Н.С. ПРЯДКО, канд. техн. наук

(Украина, Днепропетровск, Институт технической механики НАНУ и ГКАУ)

ОПИСАНИЕ УДЕЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРОДУКТОВ ИЗМЕЛЬЧЕНИЯ НА ОСНОВЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСПЕРСНОСТИ

Во многих отраслях промышленности и при обогащении полезных ископаемых твердые материалы подвергаются измельчению. При этом решаются две технологические задачи. Это – увеличение дисперсности для повышения реакционной способности (производство цемента, горно-химическое сырье, твердотопливная энергетика и т.д.) и обеспечение необходимой степени раскрытия вкраплений минералов в рудах (обогащение полезных ископаемых). Для достижения означенных технологических целей этого весьма энергоемкого процесса необходимо постоянно соотносить гранулометрический состав измельченных продуктов, от которого зависит степень раскрытия вкраплений, и их удельную поверхность, величина которой определяет энергоемкость процесса. Оптимизация этого соотношения существенно облегчается при рациональном математическом описании дисперсности.

Математическое описание дисперсности измельченного материала имеет два аспекта. Первый состоит в том, что применяемая функция должна наиболее точно отображать данные гранулометрического состава – выход классов крупности в зависимости от их крупности. Этого можно достичь, например, путем подбора уравнения линии тренда, либо путем кусочного описания распределения с применением квадратичного сплайна [3].

Кривые распределения и суммарные характеристики крупности полностью характеризуют гранулометрический состав материала с точки зрения формального его описания, но не позволяют выявить закономерности формирования дисперсности при измельчении. Необходим такой способ представления гранулометрического состава, который бы включал минимальное количество характерных для дисперсии параметров, был бы прост, удобен и имел достаточную точность для инженерных расчетов.

В практике обогащения полезных ископаемых в основном используются суммарные (кумулятивные) характеристики крупности. Они представляют собой зависимость суммарного выхода класса крупности менее или более заданного размера частиц ($y_{<x}(x)$, $y_{>x}(x)$). Однако, большую информацию о характеристике дисперсности дает распределение частного выхода классов крупности, но более логичной для анализа дисперсности является функция распределения $\varphi(x)$, представляющая зависимость частотности частиц от их размера [3].

Исходя из физического смысла функции распределения, можно вычислить как частный выход любого класса крупности, так и любого суммарного класса:

Підготовчі процеси збагачення

$$y_{x_1-x_2} = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) dx; \quad (1)$$

$$y_{<x} = \int_0^x \varphi(x) dx. \quad (2)$$

Функция распределения позволяет также довольно просто вычислить удельную поверхность дисперсии:

$$s = k_s \int_0^{x_{\max}} \frac{\varphi(x)}{x} dx, \quad (3)$$

где k_s – коэффициент, учитывающий увеличение боковой поверхности измельченных частиц из-за их неправильной формы. Для продуктов измельчения его среднее значение составляет 10,5 [3].

Исходя из уравнения (2) функцию распределения можно вычислить, если известна зависимость суммарного выхода от крупности:

$$\varphi(x) = \frac{dy(x)}{d(x)}. \quad (4)$$

Известны различные уравнения гранулометрических характеристик, полученные при конкретных допущениях и обладающих своими положительными свойствами и недостатками.

При исследовании гранулометрического состава продуктов дробления и измельчения широко используется уравнение Годэна-Андреева [1] для суммарной характеристики по содержанию класса крупности менее x в виде

$$y = Ax^k. \quad (5)$$

Значение показателя k определяет направление и степень изгиба кривой характеристики. Если характеристику построить по содержанию класса крупности более x , то при $k > 1$ она будет выпуклой, при $k = 1$ – прямой, а при $k < 1$ – вогнутой. Таким образом, по значению показателя k можно лишь качественно судить о преобладании в материале крупных или мелких зерен.

Обработка большого количества гранулометрических составов продуктов дробления и измельчения показала, что во многих случаях лучшее соответствие экспериментальным данным дает экспоненциально-степенное уравнение Розина-Раммлера-Беннета (в зарубежной литературе – уравнение RRB) [1]:

$$R = 100e^{-bx^n}, \quad (6)$$

где R – суммарный остаток на контрольном сите или суммарный выход класса $> x$, %; x – крупность; b и n – параметры, зависящие от свойств материала и размерности x .

Уравнение RRB для суммарной характеристики крупности по содержанию частиц крупностью $< x$ имеет вид:

$$y = 1 - R = 1 - e^{-bx^n}, \quad (7)$$

где y – суммарный выход класса менее x , доли единицы.

Уравнение RRB охватывает опытные данные широкого диапазона крупности, но оно не удовлетворяет одному конечному условию – нулевой выход классов достигается только при бесконечно большой крупности материала, т.е. $R = 0$ при $x = \infty$, а при нулевой крупности первая производная отлична от нуля, что не позволяет вычислить удельную поверхность. В расчетах необходимо этот факт учитывать и принимать конечную крупность материала, соответствующую некоторому значению выхода класса, например, остаток на сите 5% [1]. Сливы классификаторов шаровых мельниц, работающих в замкнутом цикле, большей частью удовлетворяют уравнению RRB (2) при $n = 1$.

Приведенные уравнения характеристики крупности широко известны в практике обогащения полезных ископаемых и позволяют решать ряд задач, например, определять число зерен (частиц) в любом классе крупности, поверхность зерен, удельную поверхность. Однако эти вычисления возможно осуществить при некоторых допущениях, которые, на наш взгляд, являются недостаточно корректными что приводит к отличию расчетных и экспериментальных данных.

Некорректность допущений состоит в следующем:

- недостаточно обоснована предельная минимальная крупность частиц от $(5-10) \cdot 10^{-7}$ мкм до 0,1-1 мкм;
- форма частиц принимается кубической или сферической, поправка на форму частиц для различных материалов не учитывается;
- максимальная крупность частиц при вычислениях по уравнению RRB принимается условно.

При этих допущениях поверхность частиц узкого класса крупности вычисляется через уравнение кривой распределения $y = f(x)$ при условии, что частицы имеют шарообразную форму, как $dS = \frac{6}{\delta} \frac{dy}{dx}$, где δ – плотность материала.

Используя уравнение RRB (3), можно получить выражение для общей удельной поверхности частиц в классе $-x_2 + x_1$ [1]:

$$S_{x_2-x_1} = \frac{6 \cdot 10^4}{\delta} nb \int_{x_1}^{x_2} x^{n-2} e^{-bx^n} dx. \quad (8)$$

Для суммарной характеристики крупности можно использовать уравнение

Підготовчі процеси збагачення

Годэна-Андреева (1) в виде $y = x^k / x_m^k$, где x_m – максимальный размер частиц. В этом случае общая удельная поверхность частиц в классе $(-x_m + x_1)$ вычисляется:

$$S_{x_m - x_1} = \frac{6 \cdot 10^4 k}{\delta x_m^k} \int_{x_1}^{x_m} x^{k-2} dx = \frac{6 \cdot 10^4 k}{\delta x_m^k (k-1)} (x_m^{k-1} - x_1^{k-1}). \quad (9)$$

Гилварри [5] провел теоретический анализ разрушения одиночных частиц. Было показано, что массовая или объемная доля материала, размер частиц которого $< x$, можно представить в виде:

$$y = 1 - \exp(-(\lambda x) - (\lambda_s x)^2 - (\lambda_v x)^3), \quad (10)$$

где $\lambda, \lambda_s, \lambda_v$ – параметры, характеризующие плотность соответственно реберных, поверхностных и объемных активированных трещин. В частности, если при разрушении преобладают реберные трещины, то уравнение превращается в уравнение RRB в виде $y = 1 - \exp(-bx^m)$. Для малых значения x уравнение (10) приводит к распределению Годэна-Шумана $y = (x/k)^\alpha$. Таким образом, применение формулы Гилварри (10) требует знания плотности активированных трещин, что в общем случае делает невозможным расчеты. Этим же отличается формула, выведенная Годэном и Мелой [6] для распределения продуктов ударного разрушения, требующая оценивания числа микротрещин, пересекающих единицу длины линейного отрезка, $e = 1 - (1 - x/x_0)^r$, где r, x_0 – параметры, характеризующие количество трещин в кристалле и размер исходного образца.

Для определения распределений по крупности предложено множество формул, но многие из них вытекают как частный случай самого общего представления, выведенного Фагерхольтом [2] для массы частиц размером x :

$$W(x)dx = ax^m e^{-bx^n} dx, \quad (11)$$

где a, b, m, n – параметры.

Таким образом, указанные непрерывные функции распределения применимы только в какой-то ограниченной области полного распределения по крупности или для их использования требуется информация, которую трудно получить. Однако представление распределения частиц по крупности в обобщенном аналитическом виде дает больше информации, чем определение гранулометрического состава в каждом конкретном случае ситовым анализом.

В связи с этим актуальным и необходимым является нахождение удобной формы выражения функции распределения частиц по размерам, описывающей конкретный способ измельчения.

В большинстве случаев измельченные частицы имеют неправильную фор-

му. Поэтому их размер в каком-либо соотношении условно заменяют диаметром шарообразной частицы. На практике широко используется средневзвешенный диаметр:

$$D = \sum \gamma d / \sum \gamma = (\gamma_1 d_1 + \gamma_2 d_2 + \dots + \gamma_n d_n) / (\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n),$$

где γ – выходы отдельных классов; d – средние диаметры отдельных классов.

Средний диаметр частиц узкого класса вычисляют как среднеарифметическое его пределов: $d = (d_1 + d_2) / 2$, где d_1, d_2 – верхний и нижний пределы крупности данного класса. Однако такой подход приводит часто к погрешностям.

Средний диаметр частиц $z(x)$ в интервале $(a, x) \subseteq (a, b)$ в [5] определен как математическое ожидание случайной величины при условии попадания ее в интервал (a, x) и выведена простая формула для определения среднего диаметра

частиц класса в интервале (a, b) в виде $z = \frac{b-a}{\ln(b/a)}$. Для расчетов по указанной

формуле относительные погрешности более, чем в два раза ниже по сравнению с z , рассчитанным как среднее арифметическое. При этом функция распределе-

ния частиц по размерам $\varphi = \varphi_1(x) = \frac{\gamma}{\ln(b/a)} \cdot \frac{1}{x}$, тогда как для вычисления сред-

него размера частиц в интервале как среднеарифметической величины равносильно условию равномерного распределения в этом интервале в виде $\varphi = \varphi_0(x) = \gamma / (b-a)$.

Естественным обобщением для приближений функции $\varphi(x)$ на отрезке (a, b) является рассмотрение ее в виде $\varphi = \varphi_\theta(x) = C \cdot x^{-\theta}$. Из условия сохранения выхода γ , получим

$$\varphi_\theta(x) = \frac{\gamma(\theta-1)a^{\theta-1}b^{\theta-1}}{b^{\theta-1} - a^{\theta-1}} x^{-\theta}, \quad (12)$$

тогда $z_\theta = \frac{(\theta-1)ab(b^{\theta-2} - a^{\theta-2})}{(\theta-2)(b^{\theta-1} - a^{\theta-1})}$. Поскольку функция $\varphi_\theta(x)$ на концах интервала

принимает значение $C_a^{-\theta}$ и $C_b^{-\theta}$, то при условии одинакового прироста этих функций на отрезке (a, b) , приравнявая отношение функций на концах интервала (a, b) , получим $(b/a)^{2-\nu} \exp\{\alpha b^\nu - \alpha a^\nu\} = (b/a)^\theta$. Отсюда

$$\theta = 2 - \nu + \alpha \frac{b^\nu - a^\nu}{\ln b/a}. \quad (13)$$

Равенство (13) решает задачу о наилучшем приближении на отрезке плот-

Збагачення корисних копалин, 2013. – Вип. 53(94)

Підготовчі процеси збагачення

ности распределения $\varphi(x)$ степенными функциями. Степень θ находится в зависимости от границ интервала (a, b) и параметров α и ν . В работе [4] экспериментально определены эти параметры и выведены формулы для шламов и рядовых углей: для шламов при $\theta = 2$, $z_2 = ab/z_1$, при $\theta = 3$ $z_3 = \frac{2a^2}{a+b}$, для рядовых углей наилучшая степень $\theta = 1,5$, при этом $\varphi_{1,5}(x) = \frac{0,5\sqrt{ab}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}} x^{-1,5}$.

Однако такой подход довольно сложный, требует знания дополнительных параметров, связанных со свойствами материалов, и предварительного определения величины θ для каждого конкретного материала.

Если задать функцию распределения дисперсности в виде

$$\varphi(x) = ax^b e^{cx}, \quad (14)$$

где a, b, c – параметры, связанные со свойствами материала, то удельная поверхность каждого класса крупности составляет

$$\sum s_i = k_s \int_0^D \frac{\varphi(x)}{x} dx = ak_s \sum x_i^{b-2} / c \cdot (x_i + (b-1)/c) e^{cx_i}, \quad (15)$$

где x_i – верхняя граница класса крупности. Удельная поверхность при этом всего измельченного продукта будет равна

$$s = k_s \int_0^D \frac{\varphi(x)}{x} dx \approx ak_s \frac{D^{b-2}}{c} (D + (b-1)/c) e^{cD}. \quad (16)$$

Таким образом, удельная поверхность полученного продукта зависит от средневзвешенной крупности дисперсного материала D , свойств материала, которые учитываются параметрами a, c и поверхностного коэффициента k_s , что вполне физически объяснимо. Из условия выполнения граничных условий по распределению крупности на интервале можно, задав только один параметр c , связанный со свойствами материала, вычислить остальные параметры. Но такой подход является приближенным и достаточно сложным.

Если известен гранулометрический состав, представленный суммарным выходом, то несложно при его компьютерной обработке, например, в программе *Excel*, получить уравнение линии тренда с использованием в качестве аппроксимирующей функции полином:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n. \quad (17)$$

В соответствии с формулой (4) функция распределения дисперсности будет равна:

$$\varphi(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1}. \quad (18)$$

Удельная поверхность дисперсии в соответствии с уравнением (3) составит:

$$s = k_s \int_0^{x_{\max}} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_0^{x_{\max}} \left(\frac{a_1}{x} + 2a_2 + 3a_3x + \dots + na_nx^{n-2} \right) dx = \dots \quad (19)$$

$$\dots = \left(a_1 \ln x + 2a_2x + \frac{3}{2}a_3x^2 + \dots + \frac{n}{n-1}a_nx^{n-1} \right) \Big|_0^{x_{\max}}.$$

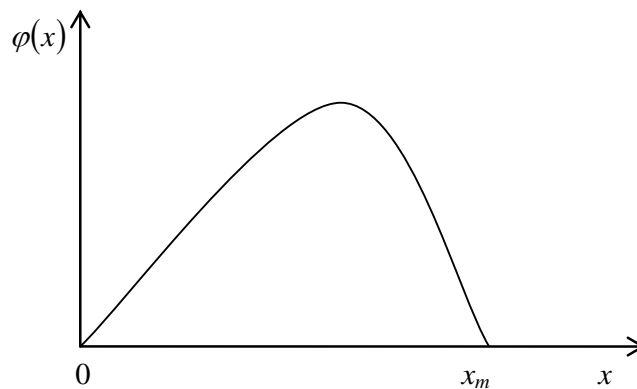
Проблема использования полученного уравнения состоит в том, что при крупности частиц, равной нулю, значение интеграла стремится к бесконечности. Это, как и в вышеописанных случаях, вызывает необходимость прибегать к надуманной минимальной крупности, а наличие коэффициентов $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ приводит эту зависимость к полипараметрической, что затрудняет выявление общих закономерностей различных дисперсий.

Указанные выше сложности позволят избежать предлагаемый нами следующий вид функции распределения

$$\varphi(x) = ax^n + bx \quad (n \neq 1), \quad (20)$$

где a, b, n – параметры дисперсии.

Графически эта зависимость представлена на рисунке.



Функция распределения частиц по крупности

Распределение характеризуется наличием экстремума (максимума) и значением максимального размера частиц x_m данной дисперсии (рисунок). Выход частиц крупностью менее x составит:

$$y = \int_0^x \varphi(x) dx = \int_0^x (ax^n + bx) dx = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + \frac{b}{2} x^2. \quad (21)$$

При крупности $x = x_m$ значение функции распределения равно нулю, т.е.

Підготовчі процеси збагачення

$$0 = ax_m^n + bx_m,$$

откуда следует: $b = -ax_m^{n-1}$, а функция распределения примет вид:

$$\varphi(x) = a(x^n - x_m^{n-1}x), \quad (22)$$

и выход частиц крупностью менее x составит:

$$y = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + \frac{ax_m^{n-1}}{2}x^2. \quad (23)$$

Вычислить удельную поверхность дисперсии можно следующим образом:

$$s = k_s \int_0^{x_{\max}} \frac{\varphi(x)}{x} dx = k_s \int_0^{x_{\max}} \left(\frac{ax^n + bx}{x} \right) dx = k_s \left(\frac{a}{n}x^n + bx \right) \Big|_0^{x_{\max}} = k_s \left(\frac{a}{n}x_m^n + bx_m \right). \quad (24)$$

Использование граничных условий позволяет прийти к двухпараметрическому алгоритму вычисления функции распределения частиц по крупности и вычисления удельной поверхности материала. Причем, параметрами служат величина показателя кривизны функции распределения n и величина максимальной крупности материала x_m . Варьируя этими величинами, возможно согласовать дисперсность и минимально возможную для нее удельную поверхность, что имеет первостепенное значение для управления процессом измельчения полезных ископаемых с целью снижения энергозатрат.

Список літератури

1. Андреев С.Е., Перов В.А., Зверевич В.В. Дробление, измельчение и грохочение полезных ископаемых: 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Недра, 1980. – 415 с.
2. Линч А. Дж. Циклы дробления и измельчения. – М.: Недра, 1981. – 343 с.
3. Пилов П.И. Описание фракционных составов и удельной поверхности дисперсных материалов с помощью квадратичного сплайна // Збагачення корисних копалин: Наук.-техн. зб. – 1999. – Вип. 3(44). – С. 14-19.
4. Пожидаев В.Ф., Прядко Н.С., Грачев О.В. Метод определения среднего размера класса крупности частиц сыпучих материалов // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – 2012. – Вип. 5(82). – С. 89-94.
5. Gilvarry J.J Distribution function for fragment size in single fracture // J. Appl.phys. – 1961. – №32. – P. 391-399.
6. Gaudin A.M., Meloy T.P. Model and comminuting distribution equation for single fracture // Trans. AIME. – 1962. – №223. – P. 40-43.

© Пилов П.И., Прядко Н.С., 2013

*Надійшла до редколегії 29.03.2013 р.
Рекомендовано до публікації д.т.н. Л.Ж. Горобець*